

Matematiksel Programlama

Cahit Karkuş

Giriş

- Yönetim kararlarının çoğu, bir kuruluşun kaynaklarının en etkili şekilde kullanılmasına yönelik çalışmaları içerir.
- Sermaye yönetiminde kaynaklar genellikle kritik bir önem sahiptir; makine, emek, para, zaman, lojistik ve hammaddeleri içerir.
- Kaynaklar değer üretmek için kullanılır. Üretilen değerler: ürün, fikir, kültür ve hizmet olarak sınıflandırılır.
- Ürün: Makine, mobilya, yiyecek veya giyim gibi
- Hizmet: Nakliye ve üretim programları, reklam politikaları veya yatırım kararları
- Matematiksel programlama (MP), yöneticilere kaynak tahsisine ilişkin planlama ve karar vermede yardımcı olmak için tasarlanmış, yaygın olarak kullanılan bir matematiksel tekniktir.
- Yöneylem Araştırması dünyasında programlama, bir problemin matematiksel olarak modellenmesi ve çözülmesi anlamına gelir.
- Matematiksel Programlama (MP), değişkenlere ve kısıtlara bağlı kalarak amaç fonksiyonunu en uygun (maksimum ya da minimum) kılmaya çalışır. Temel olarak, Matematiksel Programlama, kısıt kaynakların optimum şekilde dağılımını içeren deterministik bir matematiksel tekniktir.
- Bilgisayar programlama, MP'nin gelişmesinde ve gerçek hayattaki MP problemlerini çözmek için kullanılmasında önemli bir rol oynamaktadır.

Matematiksel Programlama

- Eşitlik ya da karşılaştırma operandları ile belirlenen kısıtlamalar altında bir amaç fonksiyonun yönünü, hızını, ivmesini, maksimum ve minimum olduğu noktaları, sıfıra eşit, belirsiz olduğu, sapma gösterdiği, kaotik davranış sergilediği noktaların (yörünge) belirlenmesi sürecidir. En iyilime süreci olarak da adlandırılır.
- Matematiksel programlama, denklemlerdeki değişkenler için varsayılan değerler, belirlenen kısıtlamalar altında belirlenerek üretim çizelgelerinin planlanmasında, taşımacılıkta, askeri lojistikte ve ekonomik büyümenin hesaplanmasında kullanılır.
- Bir matematiksel programlama modeli, hedef fonksiyonu doğrusal olmayan fonksiyon(lar) içeriyorsa ve/veya uygulanabilir bölge doğrusal olmayan eşitlikler veya eşitsizlikler içeren kısıtlamalar tarafından belirleniyorsa, NLP (Non Linear Programming) problemi olarak adlandırılır. LP (Linear Programming) modellerini çözerek, küresel bir optimal çözüm (bir problemin tüm olası çözümleri arasından en iyi olası çözüm), kısıtlamalar kümesi tarafından kısıtlanan uygulanabilir bölge içinde, modelin diğer tüm uygulanabilir çözümlerinden daha iyi veya eşit derecede iyi bir hedef değere sahip bir çözüm elde edilebilir.

Doğrusal Programlama

- Doğrusal programlama, doğrusal eşitlik ve doğrusal eşitsizlik kısıtlamalarına tabi doğrusal bir amaç fonksiyonunun optimizasyonu için matematiksel bir programlama tekniğidir.
- Primal simpleks algoritması, dual simpleks algoritması ve iç nokta algoritması gibi algoritmalar kullanarak optimizasyon problemini çözer.
- Doğrusal programlama, çok sayıda sürekli değişkeni ve kısıtlamayı verimli bir şekilde işleyebilir ve kesin çözümler sağlayabilir. Tamsayı değişkenleri içerecek şekilde dal ve sınır yöntemleri aracılığıyla karma tamsayı doğrusal programlamaya dönüştürülebilir.
- Doğrusal programlama teknikleri, örneğin konut enerji sistemleri ve pil enerji depolama sistemleri gibi enerji esnek sistemlerinin optimizasyonu için kullanılmıştır.
- Doğrusal programlamanın formülasyonu, optimizasyon probleminin açık bir biçimini gerektirir ve amaç fonksiyonu doğrusal modeller aracılığıyla değerlendirilmelidir. Bu nedenle, enerji esnek sistemlerini optimize etmek için doğrusal programlama uygulandığında, modellerin genellikle basitleştirilmesi gerekir ve bu nedenle karmaşık fizik tabanlı modeller veya doğrusal olmayan kara kutu modelleri genellikle uygulanabilir değildir.

Doğrusal Olmayan Programlama

- olmayan programlama, amaç fonksiyonunda ve/veya kısıtlamalarda doğrusal olmayanlıklarla optimizasyonu ele alır.
- Doğrusal programlamaya benzer şekilde, problem çözme için benimsenen algoritmaya bağlı olarak sürekli ve/veya tam sayı değişkenlerini işleyebilir. Doğrusal olmayan programlama, doğrusal olmayan optimizasyon problemleri için çok çeşitli algoritmaları/yöntemleri kapsar, örneğin, ardışık ikinci dereceden programlama ve iç nokta algoritması.
- PV-pil sistemleri ve kombine ısı ve güç sistemleri gibi karmaşık enerji sistemlerinin optimum boyutlandırılması için kullanılmıştır. Açık kaynaklı araçlar (örneğin, COIN-OR Doğrusal Programlama, GNU Doğrusal Programlama Kiti) ve ticari çözücüler (örneğin, CPLEX, GUROBI, MATLAB) gibi birçok yazılım aracı doğrusal ve doğrusal olmayan programlama problemlerini çözmek için kullanılabilir.

Optimizasyon

- Birçok mühendislik probleminde, bir dizi olası çözüm vardır. Bu nedenle, her alternatif çözümü değerlendirmek ve daha sonra ekonomik veya uygunluk gibi ilgi açısından en iyisini seçmek gerekir. Optimizasyon, bir dizi olası alternatif arasından en iyisini seçme bilimidir.
- Optimizasyon modellerindeki itici güç, amaç fonksiyonudur (veya çok amaçlı optimizasyondaki fonksiyonlardır).
- Optimal çözüm terimi, esasen, formülasyonda açıkça belirtilmiş veya dolaylı olarak dahil edilmiş olsun, tüm varsayımlar ve kısıtlamalar altında matematiksel modelin çözümünden en iyisine atıfta bulunur.
- Açıkça, modelin gösterdiği optimum çözüm, gerçek sistemin optimum çözümünden uzak olabilir. Dantzig ve Thapa (1997), matematiksel programlamayı (veya optimizasyon teorisini) "değişkenler üzerindeki doğrusal, doğrusal olmayan ve tam sayı kısıtlamalarına tabi bir amaç fonksiyonunu maksimize etme veya minimize etme teknikleriyle ilgilenen matematik dalı" olarak tanımlamıştır.
- Programlama kelimesi bilgisayarlarla ilişkili olmamalıdır; Burada 'zamanlama', bir gündem belirleme veya bir etkinlik planı oluşturma anlamına gelir (ReVelle ve diğerleri, 1997). Elde edilen herhangi bir "optimal" çözüm açıkça varsayımlara ve kriterlere ve bunlarla ilişkili belirsizliklere bağlıdır. Bu belirsizliklerin bir kısmı model yapısının, parametrelerin, kapsamın veya odak noktasının seçiminden kaynaklanabilir. Diğerleri verilerle, matematiksel modelleri çözmek için kullanılan optimizasyon teknikleriyle ve modeldeki niceliksel olmayan ve elle tutulamayan birçok hususu hesaba katamama ile ilgili olabilir.

Optimizasyon Tekniklerinin Sınıflandırılması

- Optimizasyon teknikleri, matematiksel programlama teknikleri olarak da bilinir.
- Kısıtlamaların varlığı, problemin doğası, ilgili denklemlerin doğası, tasarım değişkenlerinin izin verilen değerleri, ilgili değişkenlerin deterministik doğası, fonksiyonların ayrılabilirliği, ilgili hedef fonksiyonlarının sayısı vb. gibi çeşitli şekillerde sınıflandırılabilirler.
- Optimizasyon tekniklerini sınıflandırmanın olağan yolu, ilgili problemin veya denklemlerin doğasına dayanır.
- Bu teknikler Doğrusal Programlama (LP), Doğrusal Olmayan Programlama (NLP), Geometrik Programlama (GP), Dinamik Programlama (DP) vb. olarak sınıflandırılabilir.
- Bu sınıflandırma, birçok yöntemin yalnızca belirli bir problem sınıfının verimli çözümü için geliştirilmiş olması nedeniyle hesaplama açısından yararlıdır.
- Kısıtlamaların varlığına bağlı olan sınıflandırmada, problem kısıtlanmış optimizasyon veya kısıtlanmamış optimizasyon olarak sınıflandırılabilir. Su kaynakları probleminin girdi değişkenleri deterministik veya stokastik olabilir ve buna bağlı olarak teknik deterministik optimizasyon veya stokastik optimizasyon olarak sınıflandırılabilir.
- Yeh ve Becker'a (1982) göre, stokastik optimizasyon planlama amaçları için yararlıdır, deterministik optimizasyon ise akış tahminlerinin sık güncellenmesiyle gerçek zamanlı rezervuar işletimi için uygulanabilir bir yaklaşımdır (bkz. Bölüm 11.7).
- Son zamanlarda, su kaynaklarıyla ilgili çalışmalarda birçok yeni optimizasyon tekniği kullanılmıştır. Genetik Algoritma (GA), kullanımı 1970'lerde başlayan bu tür bir yaklaşımdır (bkz. Goldberg 1989; Dandy ve diğerleri 1996; Wardlaw ve Sharif 1999). Sistem kontrolünde popüler hale gelen bir diğer teknik ise bulanık programlamadır (bkz. Pedrycz 1993; Russell ve Campbell 1996).
- Optimizasyon çok geniş bir konu yelpazesini kapsamasına rağmen, su kaynaklarında optimizasyon tekniklerinin uygulanmasının mevcut durumu göz önünde bulundurulduğunda, bu bölümdeki tartışma yalnızca LP, NLP ve DP ile sınırlıdır.

Optimizasyonda Karşılaştırma Operatörleri (Eşitlik Kısıtları)

- Karşılaştırma operatörleri, işlenenler (operands) arasında bir karşılaştırma ilişkisi kuran operatörlerdir. Bu operatörler şöyle sıralanır:
- = eşit
- == tam eşit
- != eşit değil
- > büyük
- < küçük
- >= büyük eşit
- <= küçük eşit

Doğrusal (Lineer) Programlama

Doğrusal Programlamaya Giriş (Linear Programming)

$$\begin{array}{l} x^2 + y = 5 \\ x \cdot y \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + y \\ x + 3y \leq 4 \end{array}$$

Belirli doğrusal eşitlik veya doğrusal eşitsizlik kısıtları altında, doğrusal bir fonksiyonun (AMAÇ Fonksiyonu) maksimum ve minimum değerlerin elde edilmesi sürecine doğrusal programlama denir.

* OPTİMİZASYON işlevidir.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

kısıtlar

amaç fonksiyonu

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{max - min'i aranacak}$$

Doğrusal Programlamada Çözüm Yöntemleri

- Grafik çözümü ★★
- simpleks yöntemi ★★★★★
- Büyük M Yöntemi
- İki evreli yöntem
- dual simpleks yöntemi

Sözel Problemleri Doğrusal Programlama Biçiminde Modelleme (Linear Programming)

- ① Karar değişkenleri (decision variables): $x_1, x_2, x_3, \dots$
 $x_1, y, z, \dots$ } Bir şeylerin adetleri
- ② Kısıt fonksiyonları (constraints functions): $2x_1 + x_2 \leq 20$
 $x_1 - x_3 \geq 10$ -----
- ③ Amaç fonksiyonu (objective function): $P = 3x_1 + 4x_2$ (max veya min olması için x_1 ve x_2 belirlenmeye çalışılır.)
- ④ Negatif olmayan kısıtlar (nonnegative constraints): $x_1 \geq 0$
 $x_2 \geq 0$

1.adım: Karar değişkenleri belirlemeli $(x_1, x_2, x_3 \dots)$ $(x, y, z, \dots)$

2.adım: Problemede tablo verilmedi ise tablo oluştururuz!

3.adım: Amaç fonksiyonu yazılır.

4.adım: Kısıt fonksiyonları ve negatif olmayan kısıtlar yazılır. } D.P.P

↓
Çözüm yöntemine karar verilir. ↗ Grafik yöntemi! ★
→ simplex metodu ★

Örnek ① Bir oyuncak firması, pilli ve pilsiz oyuncak arabalar üretmektedir. Firma oyuncak arabaları üretirken M_1, M_2 ve M_3 makinelerini kullanmaktadır. Pilsiz oyuncak araba üretilirken bir günde M_1 'in 2 saat, M_2 'nin 1 saat ve M_3 'ün 1 saat çalışması gerekmektedir. Pilli oyuncak araba üretilirken ise bir günde M_1 'in 1 saat, M_2 'nin 2 saat ve M_3 'ün 1 saat çalışması gerekmektedir. M_1, M_2 ve M_3 makinelerinin günlük çalışma saatleri sırasıyla en fazla 6, 8 ve 7 dir. Firma üretilen bir adet pilsiz oyuncak arabadan 40 TL, bir adet pilli oyuncak arabadan ise 60 TL kâr elde etmektedir. Oyuncak firması günlük kârını en büyük yapmak için her bir arabadan kaç tane üretmelidir? Bu bilgilere göre problemi doğrusal programlama biçiminde modelleyiniz.

Karar değişkenleri: x_1 = Pilli adedi
 x_2 = Pillsiz adedi

	M_1	M_2	M_3	Kar
Pilli x_1	1	2	1	60 TL
Pillsiz x_2	2	1	1	40 TL
	6	8	7	

$$P = 60x_1 + 40x_2 \text{ (max)}$$

Kısıt
fonk.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

Negatif olmayan kısıtlar $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

D.P.P

$$P = 60x_1 + 40x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Örnek ② A manufacturer of lightweight mountain tents makes a standard model and expedition model. Each standard tent requires 1 labor-hour from the cutting department and 3 labor-hours from the assembly department. Each expedition tent requires 2 labor-hours from the cutting department and 4 labor-hours from the assembly department. The maximum labor hours available per day in the cutting and assembly departments are 32 and 84, respectively. If the company makes a profit of \$50 on each standard tent and \$80 on each expedition tent, how many tents of each type should be manufactured each day to maximize the total daily profit?

1. adım Karar değişkenleri: $x_1 = \text{standart model adedi}$
 $x_2 = \text{expedition model adedi}$

<u>2. adım</u>		<u>Cutting</u>	<u>Assembly</u>	<u>Profit</u>
	Standart (x_1)	1 saat	3 saat	\$ 50
	Expedition (x_2)	2 saat	4 saat	\$ 80
		max 32 saat	max 84	

3. adım Amaç fonk. $P = 50x_1 + 80x_2$ (max yap. istiyoruz)

4. adım Kısıt fonk. $x_1 + 2x_2 \leq 32$
 $3x_1 + 4x_2 \leq 84$
Negatif olm. k. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$$P = 50x_1 + 80x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 84$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Sözel Problemleri Doğrusal Programlama Biçiminde Modelleme Örnek Soru-1

Bir kişi sadece et, süt ve yumurta yiyecek diyet yapmaktadır. Bu kişinin günde en az 15 mg A vitamini, 30 mg C vitamini ve 10 mg D vitamini alması gerekmektedir. Buna karşılık besinlerle aldığı kolesterol 80 br/gün'ü geçmemelidir.

1 litre sütte 1 mg A, 100 mg D ve 70 br kolesterol vardır ve sütün litresi 10 TL dir. 1 kg ette 1 mg A, 10 mg C, 100 mg D vitamini ve 50 br kolesterol vardır. Etin kilosunu 90 TL dir. Yumurtanın tanesinde 10 mg A, 10 mg C ve 10 mg D vitamini ile 120 br kolesterol bulunmakta olup yumurtanın tanesi 2 TL dir. Kişinin istediği, bu diyeti en ucuz yolla gerçekleştirmektir.

Buna göre, problemin doğrusal programlama modelini oluşturunuz.

1. adım Karar değişkenleri $\Rightarrow$

Et = x_1 (kg)	Et	A	C	D	Ko	Fiyat
Süt = x_2 (lt)	Süt	1	10	100	50	90
Yumurta = x_3 (adet)	Yumurta	1		100	70	10
		10	10	10	120	2
		en az 15	en az 30	en az 10	max 80	

2. adım $P = 90x_1 + 10x_2 + 2x_3$ Amaç fonk. (en az olması)

3. adım Kısıt fonksiyonları $x_1 + x_2 + 10x_3 \geq 15$

$$10x_1 + 10x_3 \geq 30$$

$$100x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10$$

$$50x_1 + 70x_2 + 120x_3 \leq 80$$

Negatif olmayan kısıtlar:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Sözel Problemleri Doğrusal Programlama Biçiminde Modelleme Örnek Soru-2

Formulate the following problem as a linear programming problem. /

A company produces two special wines, a white and a ~~red~~. A bottle of white wine requires 14 pounds of grapes and 1 hour processing time. A bottle of red wine requires 25 pounds of grapes and 2 hour processing time.

The company has on hand 2000 pounds of grapes and can spend 160 hours processing time in the production of these wines. A bottle of white wine sells for \$11, while a bottle of red wine sells for \$20. How many bottles of each type should the company produce in order to maximize total sales?

1. adım Karar değişkenleri: Kırmızı şarap şişe sayısı = x_1
Beyaz " " " = x_2

<u>2. adım</u>		Grapes	processing	Fiyat
	Kırmızı x_1	25	2	20
	Beyaz x_2	14	1	11
		2000	160	

3. adım Amaç fonksiyonu $\Rightarrow$

4. adım Kısıt fonksiyonları $\Rightarrow$

Negatif olmayan kısıtlar

$$P = 20x_1 + 11x_2 \text{ (max)}$$

$$25x_1 + 14x_2 \leq 2000$$

$$2x_1 + x_2 \leq 160$$

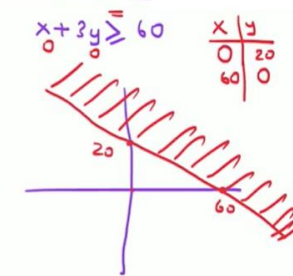
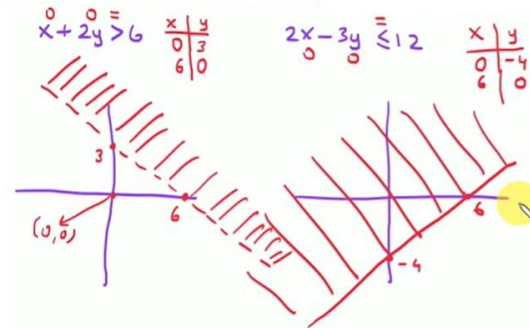
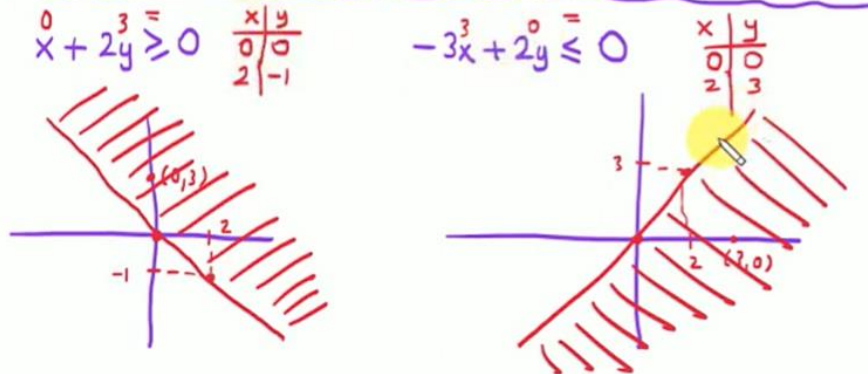
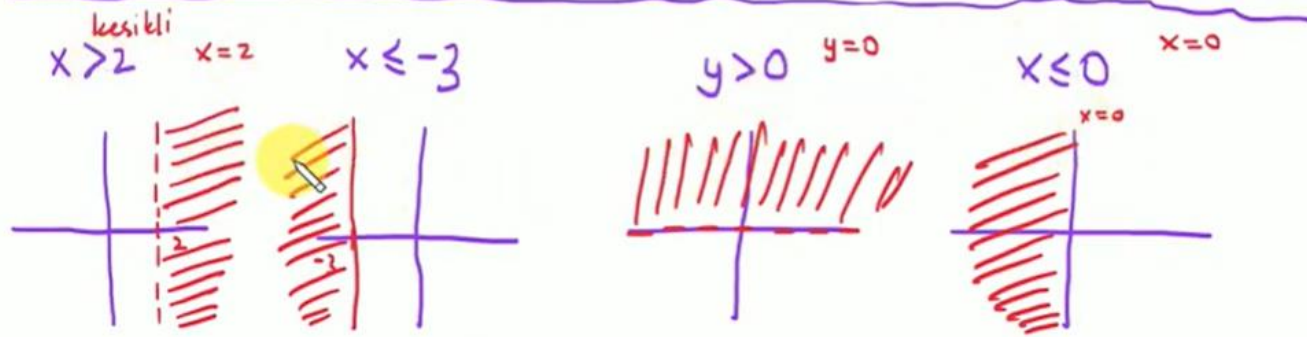
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Doğrusal Programlama Problemlerinin Çözümünde Grafik Metodu

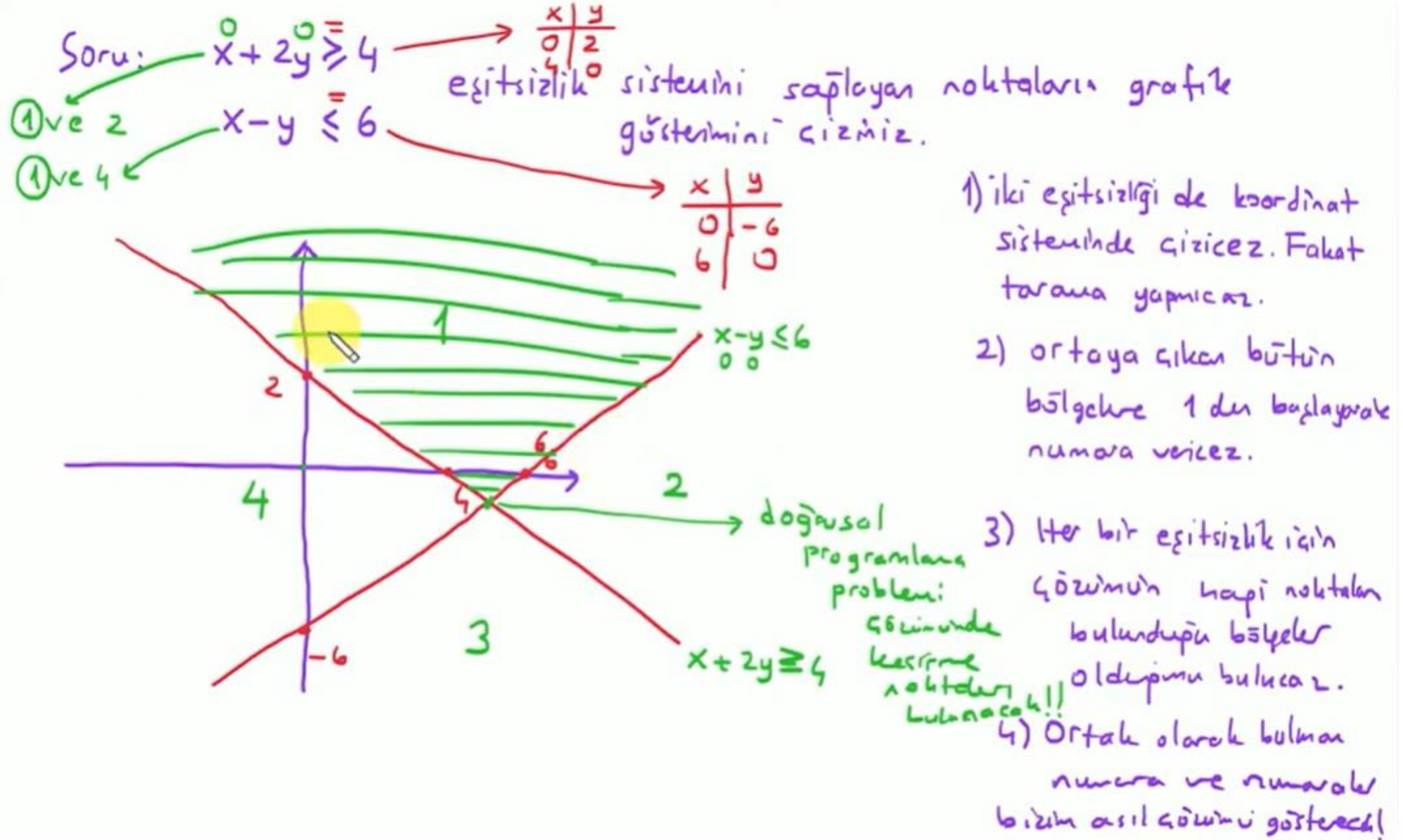
Doğrusal Eşitsizliklerin Grafiklerinin Çizimi (Graph of Linear Inequalities)

$$\begin{aligned} x \cdot y &> 4 \quad \times \\ x^2 + y &\leq 0 \quad \times \end{aligned}$$

$$x > 2 \quad \checkmark \quad y \leq 0 \quad \checkmark, \quad x + y > 0, \quad x - 2y \leq 6, \quad \dots$$



Slayt-24:



Soru:

$$x - 2y \leq 6 \rightarrow ①, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨, ⑪, ⑫$$

$$x + y > 4 \rightarrow ①, ②, ⑥, ⑩, ⑪, ⑫$$

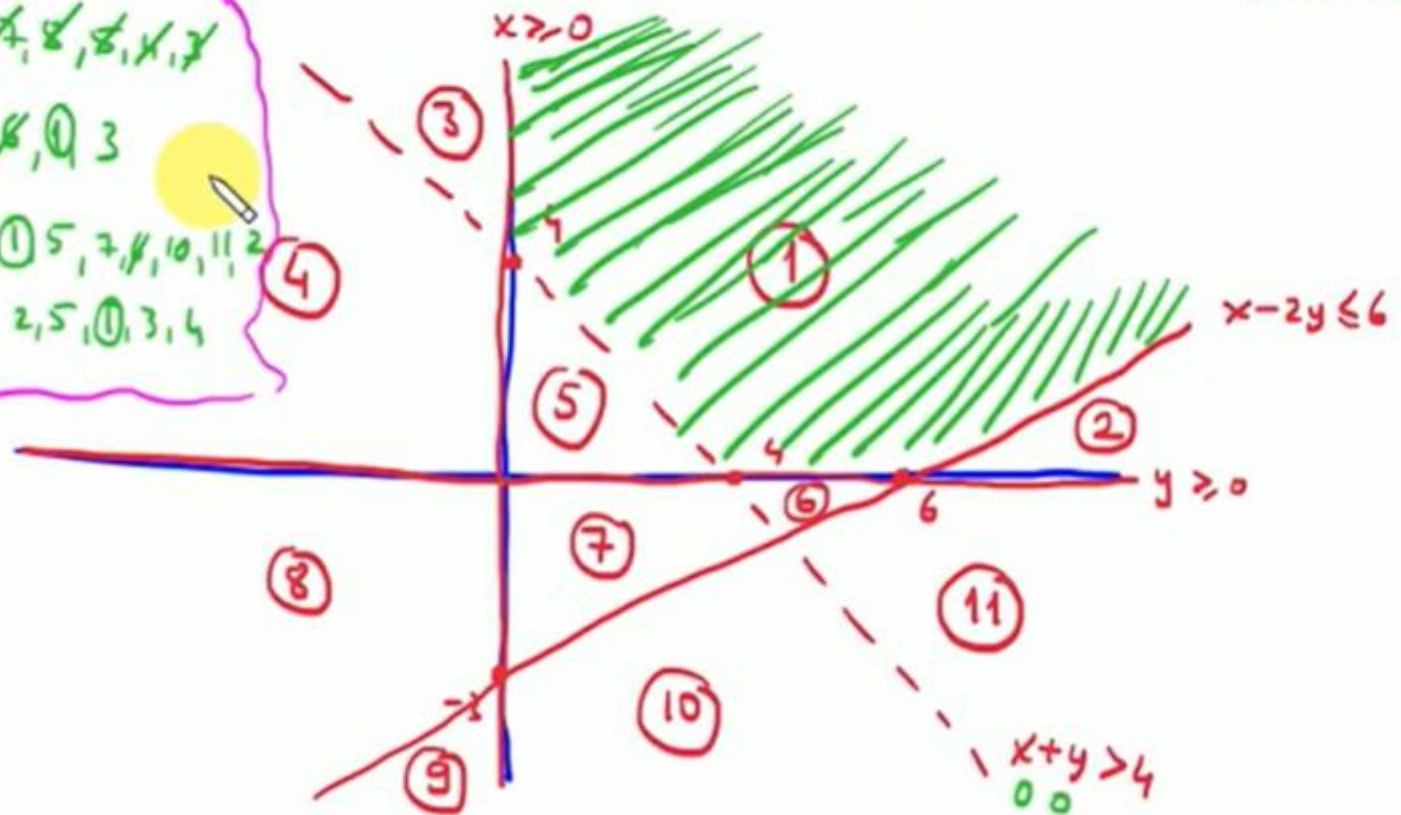
$$x \geq 0 \rightarrow x = 0 \text{ ①, ⑤, ⑦, ⑩, ⑪, ⑫}$$

$$y \geq 0 \rightarrow y = 0 \text{ ②, ⑤, ⑩, ⑪, ⑫}$$

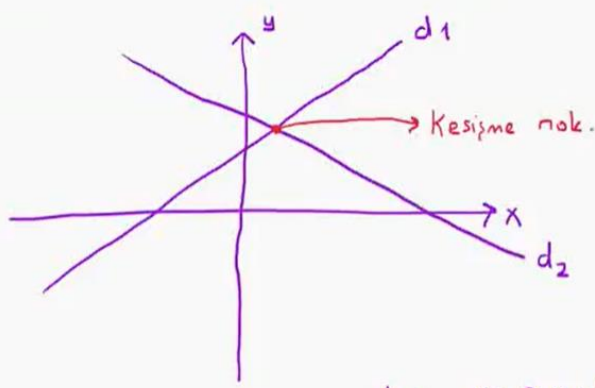
numara ve numaralar
bizim asıl çözüm göstercek!

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -3 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{array}$$



İKİ DOĞRUNUN KESİŞME NOKTASINI BULMA



$$\left. \begin{array}{l} d_1: y = a_1x + b_1 \\ d_2: y = a_2x + b_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Yok etme} \\ \text{metodu ile} \\ \text{çözümün sonucu} \\ (x, y) \\ \text{kesişme nok.} \end{array}$$

Soru: $2x - y = 8$ doğrusu ile $x + 3y = 5$ doğrusunun kesişme noktasını bulunuz.

$$\left. \begin{array}{l} 3 / 2x - y = 8 \\ x + 3y = 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6x - 3y = 24 \\ + x + 3y = 5 \\ \hline 7x = 29 \end{array}$$

$$\boxed{\left(\frac{29}{7}, \frac{2}{7} \right)}$$

$$\frac{29}{7} + 3y = 5$$

$$3y = 5 - \frac{29}{7}$$

$$3y = \frac{6}{7} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{7}}$$

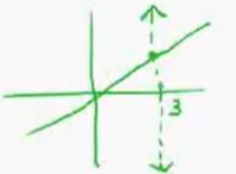
$$\boxed{x = \frac{29}{7}}$$

Soru: $x = 3$ doğrusu ile $2x + y = 10$ doğrusunun kesişme noktasını bulunuz.

$$(3, 4)$$

$$6 + y = 10$$

$$\boxed{y = 4}$$



Soru: $y = -2$ doğrusu ile $3x + y = 5$ doğrusunun kesişme noktasını bulunuz.

$$\left(\frac{7}{3}, -2 \right)$$

$$3x - 2 = 5$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3}$$



Soru:

$$x + y = 8$$

$$2x - y = 1$$

$$ax + 3y = 5$$

doğruları aynı noktada kesişiyorsa
a kaçtır?

$$\begin{array}{r} x + y = 8 \\ + 2x - y = 1 \\ \hline \end{array}$$

$$y = 5$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

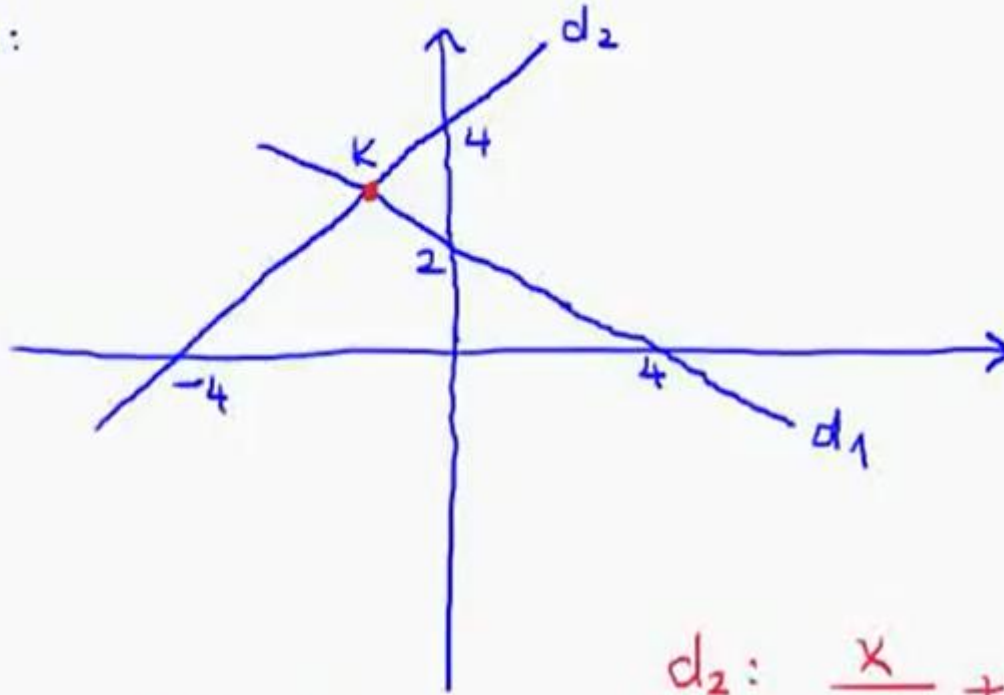
$$(3, 5)$$

$$3a + 15 = 5$$

$$3a = -10$$

$$a = -\frac{10}{3}$$

Soru:



K noktası nedir?

$$d_1: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{1}$$

(2) (4)

$$\boxed{x + 2y = 4}$$

$$d_2: \frac{x}{-4} + \frac{y}{4} = \frac{1}{1}$$

(-4) (4)

$$\boxed{-x + y = 4}$$

$$\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ + \quad -x + y = 4 \\ \hline \end{array}$$

$$3y = 8$$

$$\boxed{y = \frac{8}{3}}$$

$$x = 4 - \frac{16}{3}$$

$$\boxed{x = -\frac{4}{3}}$$

$$K \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3} \right)$$

Doğrusal Eşitsizlik Sistemlerinin Grafik Çözümü Örnek Soru-1

$$4x + y \leq 20$$

$$3x + 5y \leq 37$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

eşitsizlik sistemi veriliyor. Buna göre,

a) (3,5) noktası çözüm bölgesindedir? EVET

b) (4,5) " " " HAYIR

c) (3,6) " " " HAYIR

d) (2,6) " " " EVET //

a) $12 + 5 \leq 20 \checkmark$
 $9 + 25 \leq 37 \checkmark$
 $3 \geq 0 \checkmark$
 $5 \geq 0 \checkmark$

b) $16 + 5 \leq 20 \ X$

c) $12 + 6 \leq 20 \checkmark$

$9 + 30 \leq 37 \ X$

d) $8 + 6 \leq 20 \checkmark$

$6 + 30 \leq 37 \checkmark$

$2 \geq 0 \checkmark$

$6 \geq 0 \checkmark$

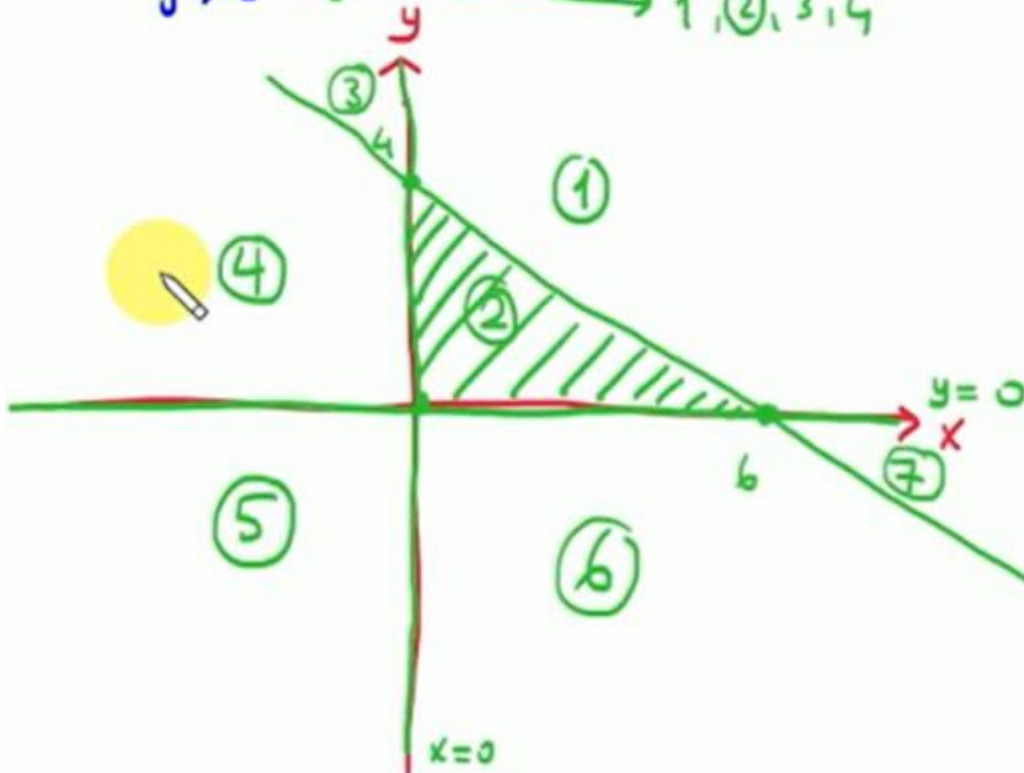
Doğrusal Eşitsizlik Sistemlerinin Grafik Çözümü Örnek Soru-2

$$2x + 3y \leq 12 \longrightarrow \textcircled{2}, \textcircled{X}, \textcircled{X}, \textcircled{X}$$

$x \geq 0 \Rightarrow x=0$ eşitsizlik sisteminin çözümünü grafiksel olarak yapınız.

$y \geq 0 \Rightarrow y=0$

x	y
0	4
6	0



Çözüm bölgesi

* Sınırlıdır. (Max ve min vardır.)

* köşeler

$(6,0), (0,4), (0,0)$

$$2x + 3y \leq 12 \Rightarrow 0 \leq 12$$

Doğrusal Eşitsizlik Sistemlerinin Grafik Çözümü Örnek Soru-3

$$x+y \leq 11 \rightarrow \text{X, 6, X, X}$$

$$x+5y \geq 15 \rightarrow \text{7, 6, 3, 1}$$

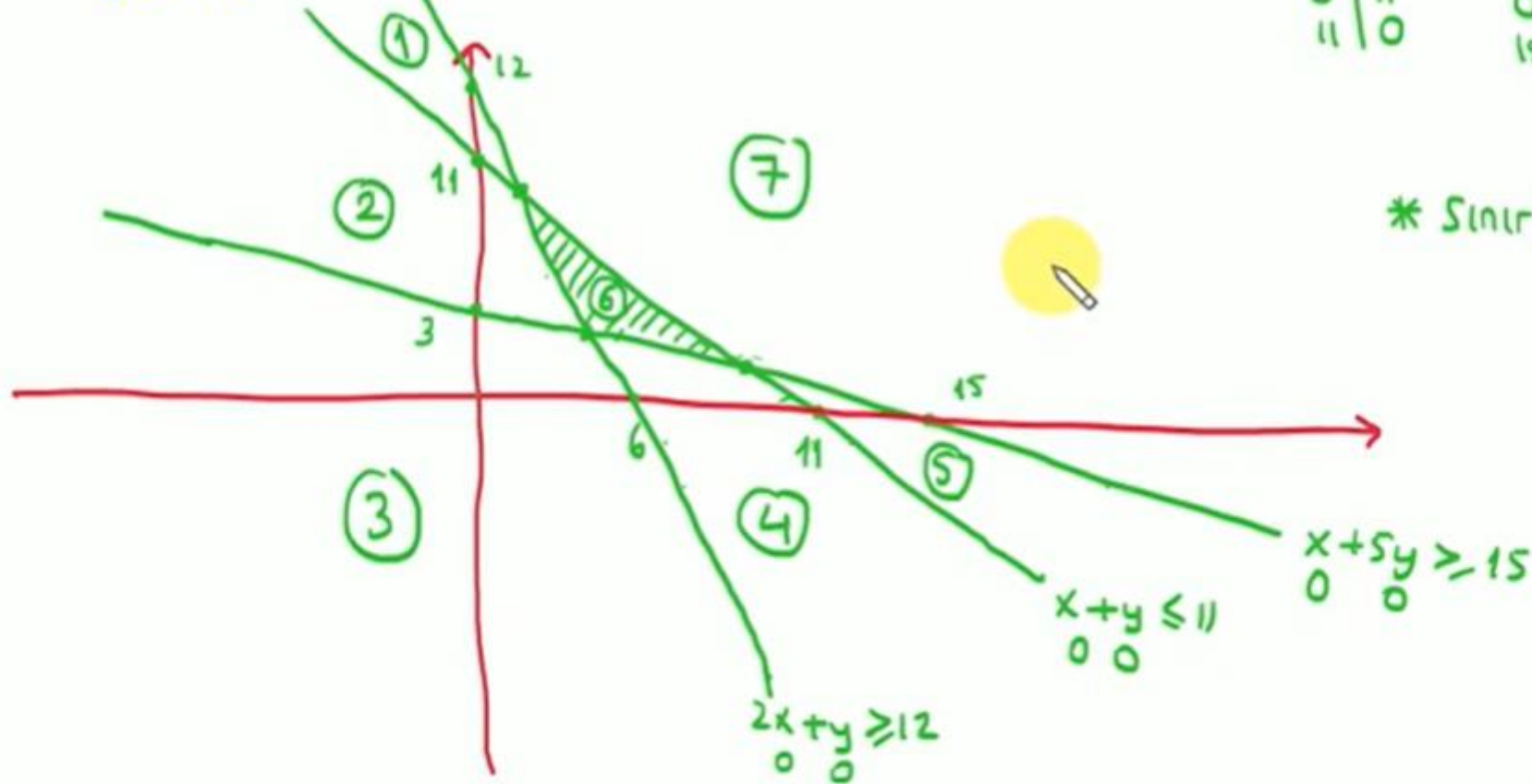
$$2x+y \geq 12 \rightarrow \text{4, 5, 6, 7}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm bölgesini koordinat sisteminde gösteriniz.

x	y
0	11
11	0

x	y
0	3
15	0

x	y
0	12
6	0



* Sınırlı bölge

Doğrusal Eşitsizlik Sistemlerinin Grafik Çözümü Örnek Soru-4

$$4x + 3y \geq 24 \rightarrow x, y, x \geq 0$$

$$3x + 4y \leq 8 \rightarrow x, y, x \geq 0$$

$$x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$

$$y \geq 0 \rightarrow y \geq 0$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 8 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 2 \\ 8/3 & 0 \end{array}$$

eşitsizlik sisteminin çözüm bölgesini grafik ile gösteriniz.

Çözüm bölgesinin köşe koordinatlarını bulunuz. Çözüm bölgesi

sınırlı mı sınırsız mıdır belirleyiniz.

$$3 / 4x + 3y = 24$$

$$-4 / 3x + 4y = 8$$

$$12x + 9y = 72$$

$$+ -12x - 16y = -32$$

$$-7y = 40$$

$$y = -\frac{40}{7}$$

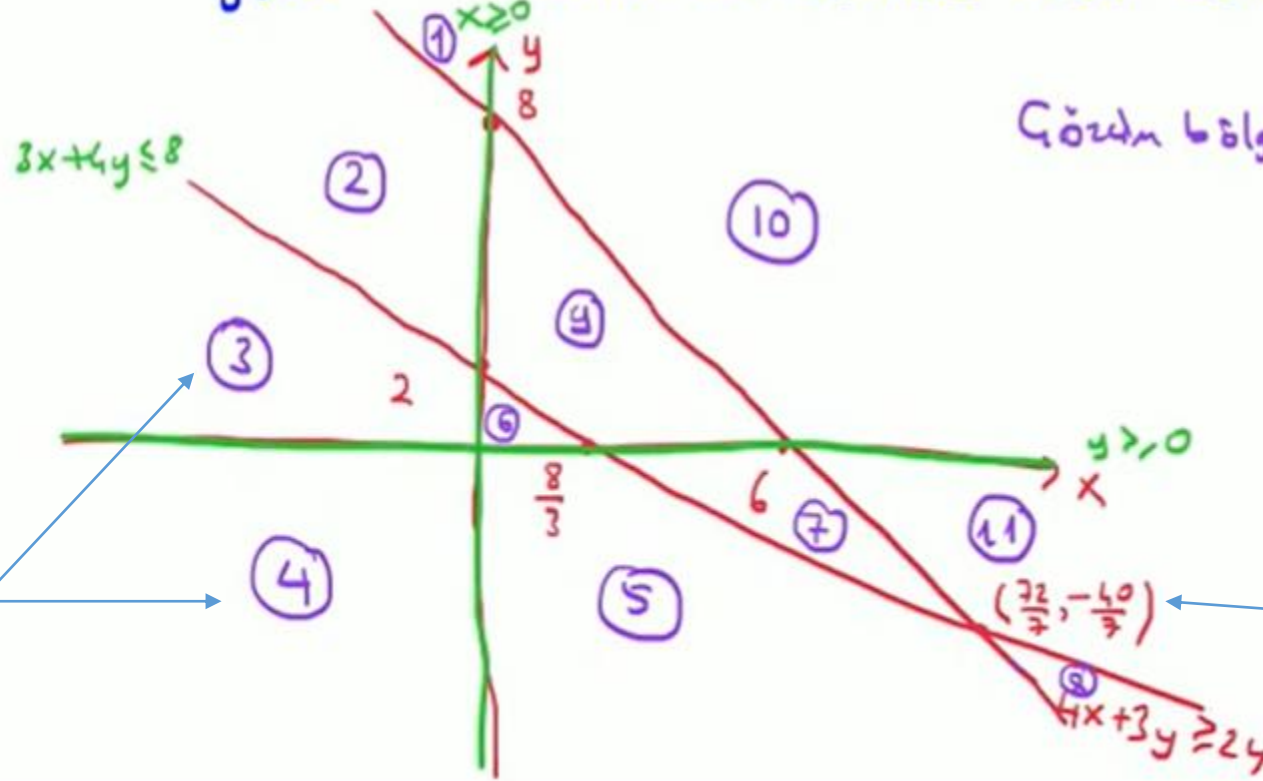
$$3x - \frac{160}{7} = 8$$

$$3x = 8 + \frac{160}{7}$$

$$3x = \frac{216}{7}$$

$$x = \frac{72}{7}$$

Çözüm bölgesi yok!!



Bölgeler

Kesişme noktası

Önceki soru çözüm adımları

- Öncelikle eşitsizlik sisteminin çözüm bölgesini grafikte çizilir. xy -koordinat sistemi çizilir. Eşitsizlikler birer doğru olarak koordinat sistemi üzerine yerleştirilir. İlk eşitsizlik doğru olarak alınır $x=0$ için $7=8$, $y=0$ için $x=6$ bulunur. Diğer eşitsizlikler de çizilir.
- Kesişme noktaları bulunur.

Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafik Çözümü (Geometrik Approach)

- Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafik Çözümü hangi durumlarda mümkündür?
- 2 değişkenli olmak zorundadır.
- Amaç fonksiyonu yazılır. İki karar değişkeni vardır: x_1, x_2
- Sıfır fonksiyonları, kısıtlama fonksiyonları yazılır.
- Bu şekilde oluşan iki değişkenli D.P.P nin grafik çözümüne geometrik yaklaşım uygulanır.
- Geometrik yaklaşımın uygulanamayacağı durum ise 3 ve daha fazla değişken durum söz konusudur.

Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafik Çözümü (Geometric Approach)

* 2 değişkenli d.p.p nin çözümünde bu metod kullanılır.

$$\begin{aligned} P &= 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 &\geq 0, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

x_1 ve x_2

$$P = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

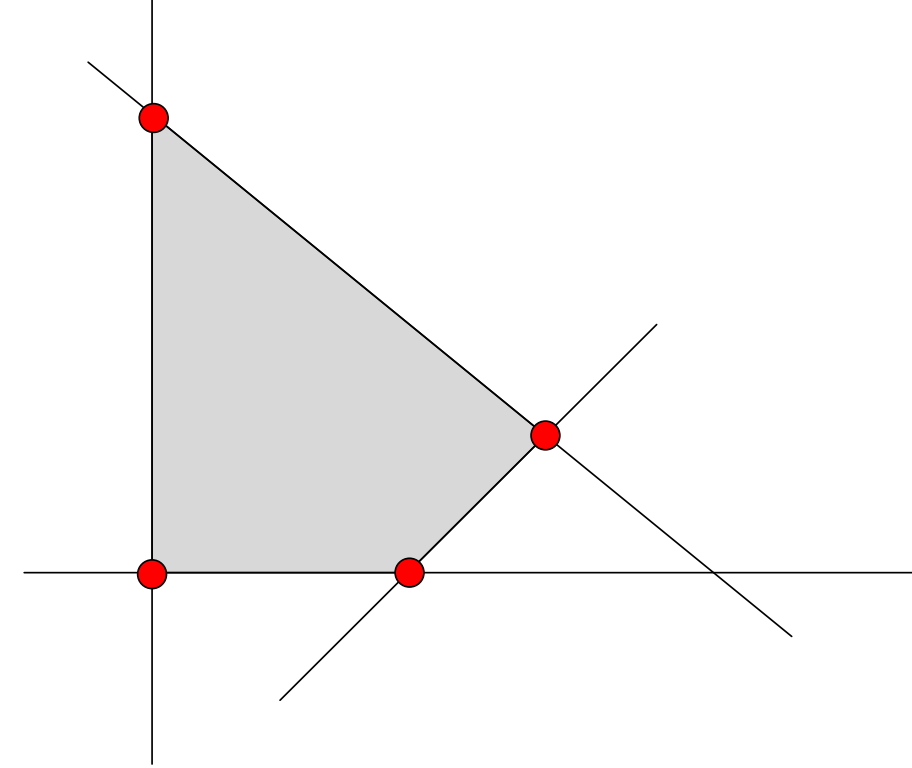
x_1, x_2
ve x_3

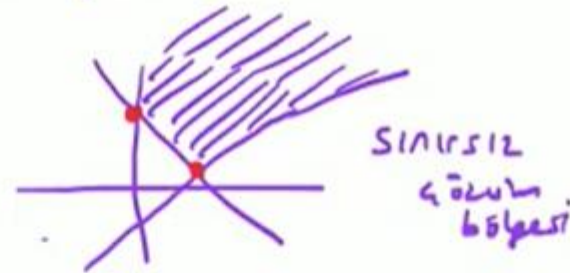
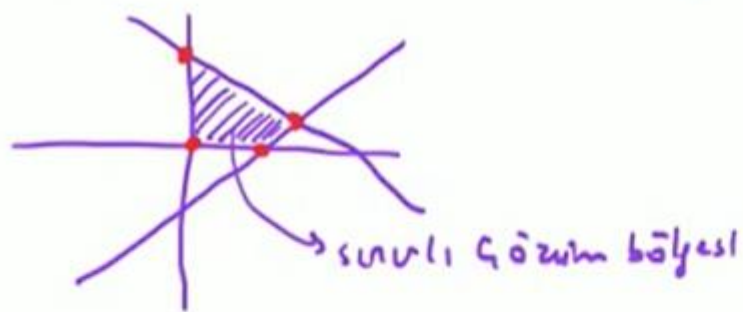
Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafik Çözümü (Geometrik Approach)

- 2 değişkenden daha fazla değişkeni olan d.p.p nin çözüm aşamalarında yol gösterecek 2 teoremden bahsedilir.

Teorem-1: Doğrusal Programlamanın Temel Teoremi
(Fundamental theorem of linear programming):

- Bir doğrusal programlama probleminde amaç fonksiyonunun en iyi çözüm değeri (Optimal Value) var ise, bu değer mutlaka çözüm bölgesinin (feasible region) bir veya daha fazla köşe noktasında gerçekleşir.





$$P = 3x_1 + 4x_2$$

~~$$P = 3x_1 - 4x_2$$~~

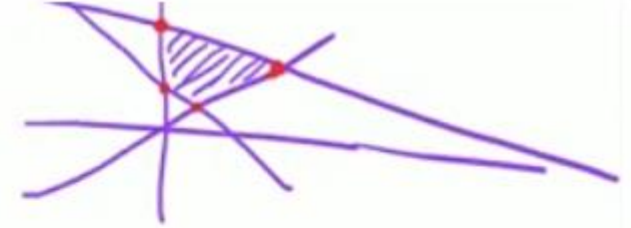
Teorem-2 : En iyi çözümün varlığı (existence of optimal solutions)

1.madde : Eğer d.p.p'nin çözüm bölgesi sınırlı ise bu durumda amaç fonksiyonunun maximum ve minimum değer her zaman var olur.

2.madde : Eğer d.p.p'nin çözüm bölgesi sınırsız ise ve amaç fonksiyonundaki katsayılar pozitif ise minimum değer mevcut olur fakat maximum değer mevcut olmaz.

3.madde : Eğer çözüm bölgesi boş küme ise ne max, ne de min değer yoktur.

Geometrik Yaklaşımda Çözüm Adımları



1. adım Çözüm bölgesi çizilir.

2. adım Köşe koordinatları bulunur.

3. adım Köşe noktaları için amaç fonksiyonunun aldığı değerleri gösteren bir tablo yapılır.

4. adım Bu tablodan en iyi çözüm belirlenir ve o çözüm yorumlanır.

Köşeler	P
---	---
---	---
---	---

Ör: $P: \max z = 3x + 2y$

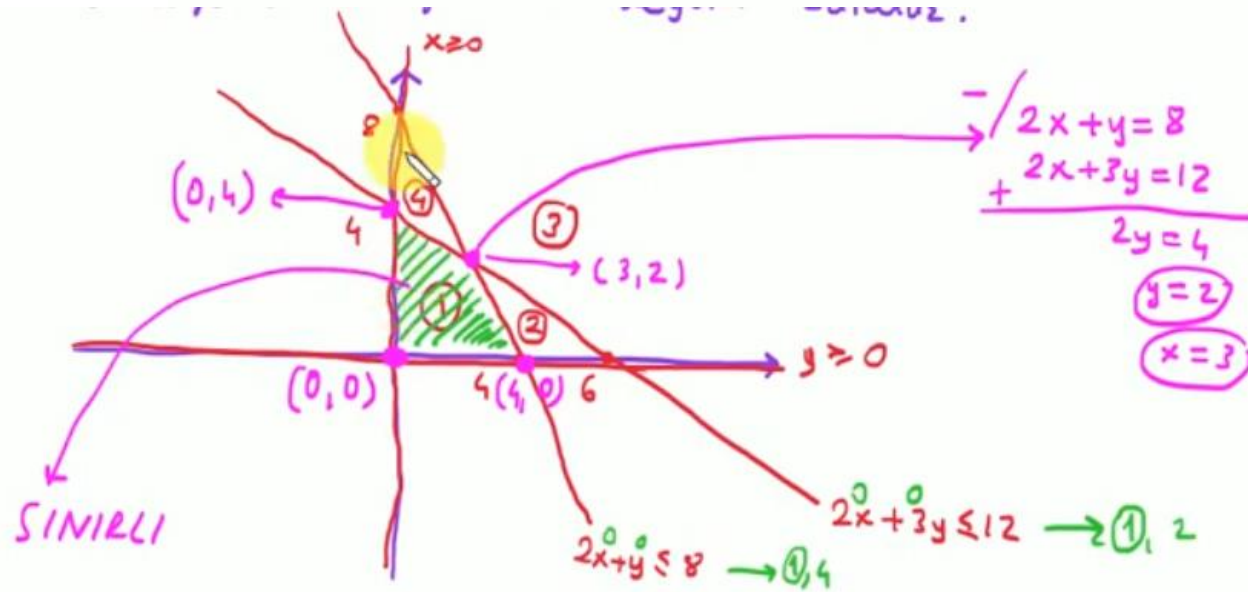
$$2x + 3y \leq 12$$

$$2x + y \leq 8$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Köşeler	P
---	---
---	---
---	---

biçiminde tanımlı d.p.p'nin grafiksel yöntem ile uygun çözüm alanını belirleyerek en iyi çözüm değeri bulunuz.



Max = 13, $(3,2)$ noktasında
 $x=3, y=2$ iken
 $P=13$

Köşeler	$P = 3x + 2y$
$(0,4)$	8
$(4,0)$	12
$(0,0)$	0 $\rightarrow$ min
$(3,2)$	13 $\rightarrow$ max

Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafik Çözümü Örnek Soru-1

$$z = 12x + 14y$$

$$-2x + y \geq 6$$

⑤, 3, 1 $x+y \leq 15$

$$1, 2, 7 \quad 3x - y \geq 0$$

$x, y \geq 0$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{array}$$

x	y
0	15
15	0

biçiminde tanımlı doğrusal programlama probleminin grafiksel yöntem ile maksimum ya da minimum z için en iyi çözüm değerini bulunuz.

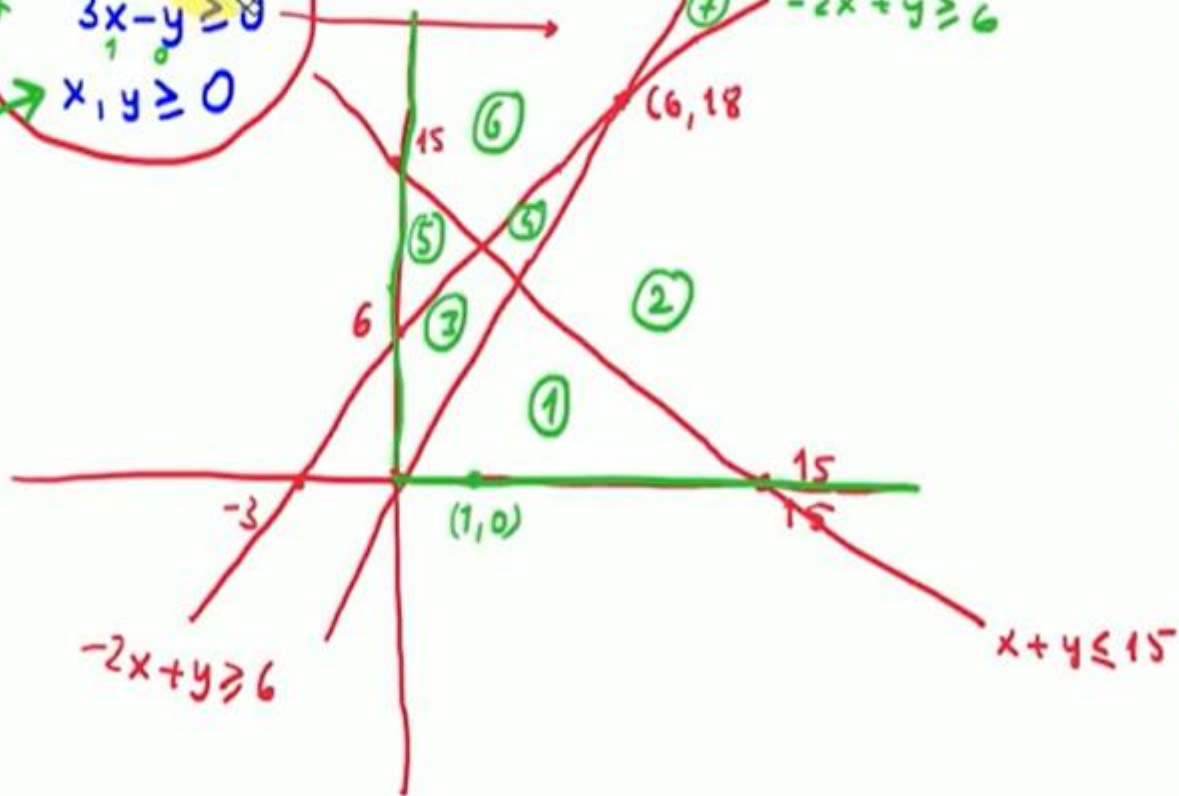
$$3x - y = 0$$

$$x - 2x + y = 6$$

$$\boxed{x=6} \quad y=18$$

Çözüm bölgesi yok!

Çözüm de yok!!



Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafik Çözümü Örnek Soru-2

Minimize and maximize $z = 10x + 20y$

subject to

$$6x + 2y \geq 36$$

$$2x + 4y \geq 32$$

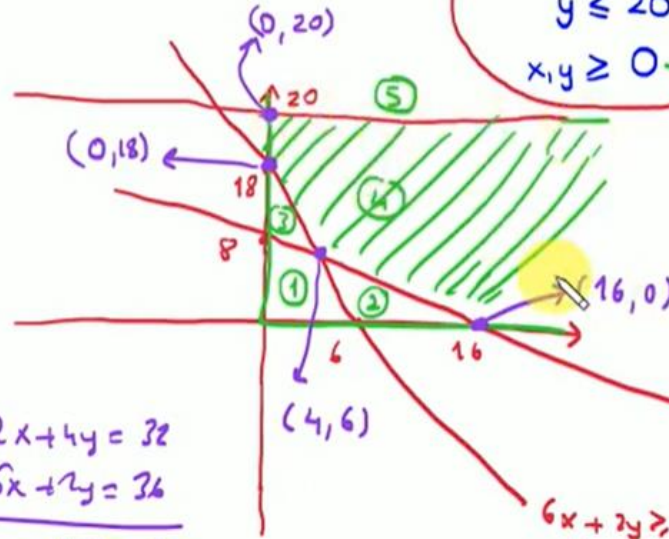
$$y \leq 20$$

$$x, y \geq 0$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 18 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & 8 \\ 16 & 0 \end{array}$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



$$\begin{array}{r} -3/2x + 4y = 32 \\ +6x + 2y = 36 \\ \hline -10y = -60 \\ y = 6 \quad x = 4 \end{array}$$

$$y \leq 20 \rightarrow \text{X, X, X, X, X}$$

$$2x + 4y \geq 32 \rightarrow \text{X, X, X, X, X}$$

$$6x + 2y \geq 36 \rightarrow \text{X, X, X, X, X}$$

4 numaralı bölge sınırsız

üstten
Bölge sınırsız bu nedenle maximum yok! (belirlenmez)
Minimum var

Köşeler	$z = 10x + 20y$
(4, 6)	160
(16, 0)	160
(0, 18)	360
(0, 20)	400

z nin min değeri 160 ((4, 6) ve (16, 0) noktalarında)

Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafik Çözümü Örnek Soru-3

$$\max Z = 3x_1 + x_2$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 10$$

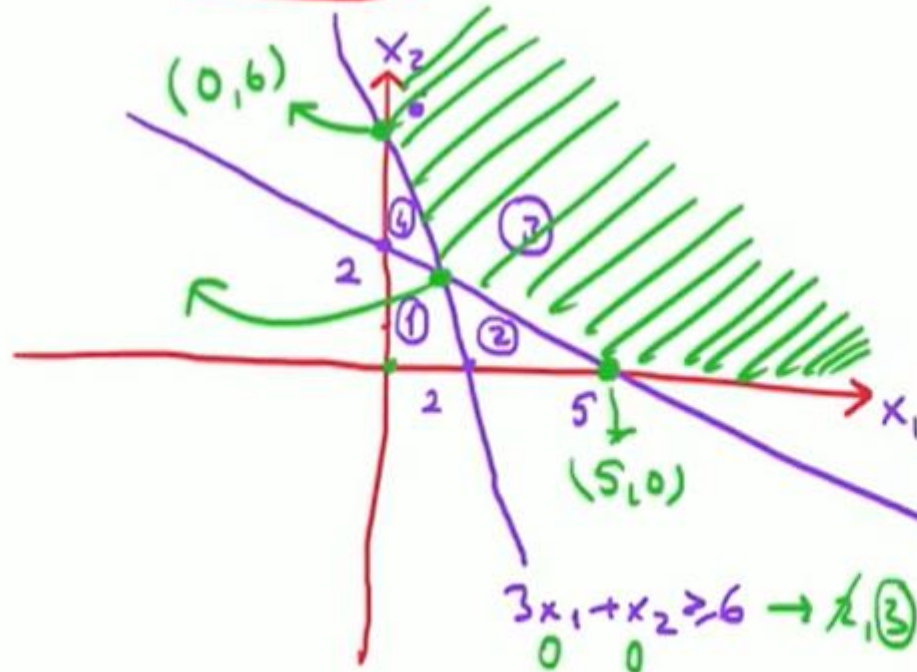
$$3x_1 + x_2 \geq 6$$

1. bölgede $x_1, x_2 \geq 0$

biçiminde tanımlı doğrusal programlama probleminin grafiksel yöntemle en iyi çözüm değerini elde ediniz.

$$\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{array}$$



çözüm
sınırsız bölgesi

Çözüm belirlenemez.
max bulunamaz.
(max yok)!

$$3x_1 + x_2 \geq 6 \rightarrow x_1 \geq 2$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 10 \rightarrow x_2 \geq 2$$

Doğrusal Programlama Problemlerinin Grafik Çözümü Örnek Soru-4

Solve the following linear programming problem by using geometric approach.

maximize $P = 2x_1 + 6x_2$

subject to $5x_1 + 2x_2 \leq 40$

$x_1 + 3x_2 \leq 21$

$-2x_1 + 3x_2 \leq 12$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$$\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 20 \\ 8 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 7 \\ 21 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 4 \\ -6 & 0 \end{array}$$

$2/5x_1 + 2x_2 = 40$

$5/-2x_1 + 3x_2 = 12$

$$\begin{array}{r} 2/5x_1 + 2x_2 = 40 \\ 5/-2x_1 + 3x_2 = 12 \\ \hline 19x_2 = 140 \end{array}$$

$5x_1 + 2x_2 = 40$

$-5/x_1 + 7x_2 = 21$

$-13x_2 = -65$

$x_2 = 5$

$x_1 = 6$

$2/x_1 + 3x_2 = 21$

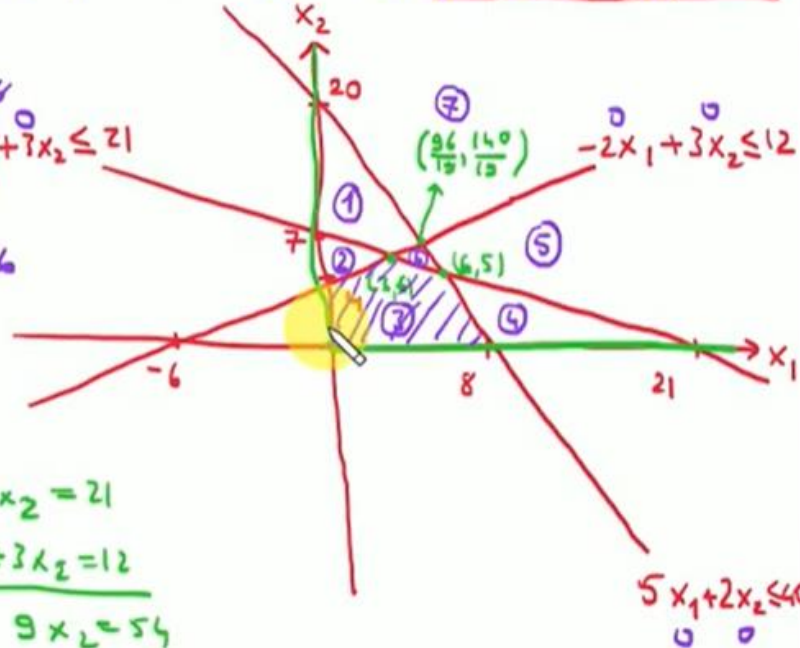
$-2x_1 + 3x_2 = 12$

$9x_2 = 54$

$x_2 = 6$

$x_2 = \frac{140}{19} \Rightarrow 5x_1 + \frac{280}{19} = 40$

$5x_1 = \frac{480}{19} \Rightarrow x_1 = \frac{96}{19}$



$Max = 42$ $(6,5)$ ve $(3,6)$

Köşeler	$P = 2x_1 + 6x_2$
$(0,0)$	0
$(8,0)$	16
$(6,5)$	42
$(3,6)$	42
$(0,4)$	24

Doğrusal Programlama Problemlerinin Çözümünde Tablo Metodu

Doğrusal Programlama Problemlerinin Çözümünde Tablo Metodu (The Table Method)

1. metod: Grafik yöntemi ^{(x,y) (x₁,x₂)} (2 karar değişkeni - max - min bulma)

2. metod: Tablo yöntemi



İstenilen sayıda
karar değişkeni
için kullanılabilir.

(2 değişkenli) * maksimum problemlerde kullanılır.

$$\max P = 50x_1 + 80x_2 \longrightarrow (x_1, x_2 \text{ kat sayılı her reel sayı olabilir})$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 84$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Kısıt fonksiyonları pozitif bir değerde
küçük veya eşit olmalıdır.

$$\max P = 50x_1 + 80x_2 \rightarrow (x_1, x_2 \text{ katı sayılar her şey reel sayı olabilir})$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 84 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Kısıt fonksiyonları pozitif bir değerden küçük veya eşit olmalıdır.

Gevşek değişkenler (Slack variables): $s_1, s_2, s_3, \dots$

Kısıt fonksiyonlarının oluşturduğu eşitsizlik sistemini denklemler sistemine çevirmek için kullanılan negatif olmayan değerlerdir.

$$x_1 + 2x_2 \leq 32$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 84$$

$$\rightarrow x_1 + 2x_2 + s_1 = 32$$

$$\rightarrow 3x_1 + 4x_2 + s_2 = 84$$

s_1, s_2 ekleyerek eşitsizlikler denkleme dönüştürülür.

Basic solutions = Temel çözümler

Basic feasible solutions = Temel mümkün çözümler

denklemler sisteminin
çözümleri $\leftarrow$
işle
Basic solutions olurlar

(x_1, x_2, s_1, s_2)
 $(20, 4, -3, -2)$

basic solution
fakat
feasible
değil

$(20, 4, 0, 2)$

basic
feasible solution

Basic variables, non basic variables
(temel değişken) (temel olmayan değişken)

: Basic feasible solution'da
0'lar non basic variables
0 olmayanlar basic variable

Tablo Metodunda Çözüm Adımları

x_1, x_2 ve m tane
kısıt fonksiyonu

1) Gevşek değişkenleri kullanarak eşitsizlikler sistemi, denklemler sistemine çevrilmelidir.

2) Tabloda $\frac{(m+2)(m+1)}{2}$ satır ve $m+2$ sütun olur.

$$m=2 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ satır.}$$

$$2+2=4 \text{ sütun}$$

$$P = 50x_1 + 80x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 84 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Her bir satırda 2 sıfır olacak şekilde
 $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$ tane kombinasyonlar tabloda yazılır.

x_1	x_2	s_1	s_2
0	0		
0		0	
0			0
	0	0	
	0		0
		0	0

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

Ø

3) Ardından her satır denklemler sisteminde yerine konularak geri katılan boşluklar doldurulur. Çözümümüz durum ve sonsuz çözüm durumlarında 0 satır boş bırakılır.

4) d.p.p bulunan x_1 ve x_2 ler hesaplanmış olur. Satırlarda hiç negatif sonuç olmayanlar amaç fonksiyonunda yerine konular ve max değer tespit edilir. Basic feasible solutions

Soru: $\max P = 50x_1 + 80x_2$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 32 \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 84 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tablo metodu ile:

1. adım $x_1 + 2x_2 + s_1 = 32$ $m=2$
 $3x_1 + 4x_2 + s_2 = 84$

2. adım $\frac{(m+1) \cdot (m+2)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ satır
 $m+2 = 2+2 = 4$ sütun

x_1	x_2	s_1	s_2
0	0	32	84
0	16	0	20
0	21	-10	0
32	0	0	-12
28	0	4	0
20	6	0	0

$\rightarrow s_1 = 32$
 $s_2 = 84$
 $\rightarrow 0 + 2x_2 + 0 = 32 \rightarrow x_2 = 16 \rightarrow 0 + 64 + s_2 = 84$
 $\rightarrow 2x_2 + s_1 = 32$
 $4x_2 = 84 \Rightarrow x_2 = 21 \quad s_1 = -10$
 $\rightarrow x_1 = 32 \quad 96 + s_2 = 84 \quad s_2 = -12$
 $\rightarrow x_1 = 28 \quad s_1 = 4$
 $\rightarrow -3/x_1 + 2x_2 = 32$
 $+ 3x_1 + 4x_2 = 84 \quad x_1 = 20$
 $\hline -2x_2 = -12 \quad (x_2 = 6)$

3. adım

	x_1	x_2	s_1	s_2
→	0	0	32	84
→	0	16	0	20
X	0	21	-10	0
X	32	0	0	-12
→	28	0	4	0
→	20	6	0	0

4. adım

x_1	x_2	$P = 50x_1 + 80x_2$
0	0	0
0	16	1280
28	0	1400
20	6	1480

$$\begin{aligned} \text{Max} &\Rightarrow P = 1480 \\ &(20, 6) // \\ x_1 &= 20 \\ x_2 &= 6 // \end{aligned}$$

Doğrusal Programlama Problemlerinin Çözümünde Tablo Metodu
Örnek Soru-1

a) Use slack variables s_1 and s_2 to convert the following system of inequalities to a system of equations.

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1 + 5x_2 \leq 20 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 3x_1 + 2x_2 + s_1 &= 21 \\ x_1 + 5x_2 + s_2 &= 20 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

b) Find the basic solution for which $x_1 = 0$ and $s_1 = 0$.

c) Find the basic solution for which $s_1 = 0$ and $s_2 = 0$.

$$b) \quad 3 \cdot 0 + 2x_2 + 0 = 21 \Rightarrow x_2 = \frac{21}{2}$$

$$0 + 5 \cdot \frac{21}{2} + s_2 = 20 \Rightarrow s_2 = 20 - \frac{105}{2} \Rightarrow s_2 = -\frac{65}{2}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \\ (0, \frac{21}{2}, 0, -\frac{65}{2}) \end{matrix}$$

c) $3x_1 + 2x_2 = 21$
 $-3 / x_1 + 5x_2 = 20$
 $\hline -13x_2 = -39 \Rightarrow x_2 = 3$
 $x_1 = 5$

Basic solution = $(5, 3, 0, 0)$ feasible

Doğrusal Programlama Problemlerinin Çözümünde Tablo Metodu

Örnek Soru-2

Construct the table of basic solutions and use it to solve the following linear programming problem:

$$\text{Maximize } P = 10x_1 + 25x_2$$

subject to

$$3x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$m = 2$$

$$s_1 \text{ ve } s_2$$

$$s_1 \geq 0, s_2 \geq 0$$

1. adım $3x_1 + 2x_2 + s_1 = 21$
 $x_1 + 5x_2 + s_2 = 20$

2. adım Satır sayısı $\Rightarrow \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ satır 3. adım

Sütun sayısı $\Rightarrow m+2 = 4$ sütun

	x_1	x_2	s_1	s_2
→	0	0	21	20
X	0	$2\frac{1}{2}$	0	$-6\frac{1}{2}s_2$
→	0	4	13	0
→	7	0	0	13
X	20	0	-39	0
→	5	3	0	0

5. satır: $x_1 = 20$ $60 + 0 + s_1 = 21$
 $s_1 = -39$

1. satır $s_1 = 21$ $s_2 = 20$

2. satır $2x_2 = 21 \Rightarrow x_2 = \frac{21}{2}$

$\otimes + \frac{105}{2} + s_2 = 20$

3. satır: $5x_2 = 20$ $s_2 = \frac{40}{2} - \frac{105}{2}$

$x_2 = 4$

$s_2 = -6\frac{5}{2}$

$0 + 8 + s_1 = 21$

$s_1 = 13$

4. satır: $3x_1 = 21$ $x_1 = 7$ $7 + 0 + s_2 = 20$
 $s_2 = 13$

6. satır: $3x_1 + 2x_2 = 21$
 $-3/ x_1 + 5x_2 = 20$
 $\frac{-13x_2 = -39}{x_2 = 3}$

4. adım

x_1	x_2	$P = 10x_1 + 25x_2$
0	0	0
0	4	100
7	0	70
5	3	125

Max $P = 125$, $x_1 = 5$, $x_2 = 3$

İndir

- https://www.youtube.com/watch?v=uCOh8K6-8Vc&list=PLcNWqzWzYG2tMf8yy0_m1q4VLkNiHqurz&index=20